الخميس 23/10/2014 ③ دوال محدودة التغير

$\boxed{3}$ إذا كانت f ذات تغير محدود على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون أيضاً ذات تغير محدود على أي فترة جزئية منها مثل:

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$$

ويكون عندئذ:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

وهذا ينتج من التعريف والملاحظة السابقة مباشرة.

- دقة ونعومة التجزئة:

نقول عن التجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ أنها أدق أو أنعم أو أقوى من التجزئة P_2 لنفس الفترة إذا كانت $P_2 \subset P_1$. كما نقول أيضاً أن التجزئة P_2 أخشن أو أضعف من P_1.

مثلاً: $P_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$

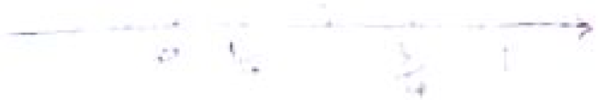
المجموعة P_2 وبالإضافة $P_1 \subset P_2$.

إذا أخذنا الفترة $[0,1]$ فإن كلاً من $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

~~هي~~ تجزئة لهذه الفترة حيث:

$$P_1 \subset P_2$$

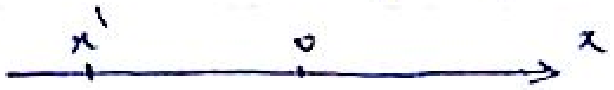


لاحظ هنا من خلال المثال السابق أنه إذا كان $P_1 \subset P_2$ فإن $\lambda(P_1) \geq \lambda(P_2)$ إلا أن العكس ليس صحيحاً.

نعود إلى الدوال محدودة التغير:

ملاحظات:

ت) تكون الدالة f ذ.ت.م على الفترة $]-\infty, \infty[$ فيما اذا كانت هذه الدالة ذ.ت.م على أية فترة $[A, B]$ ويوجد ثابت موجب M لا يتعلق بالعددين A, B بحيث أن التغير الكلي $\overset{B}{\underset{A}{V}} \le M$.



وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي:

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \sup_{\substack{A<0 \\ B>0}} \{ \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to \infty}} \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \le M .$$

ث2) لدينا دائماً $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \ge 0$ بغض النظر عن اجل فترات غير محدودة. فمثلاً اذا كانت $f = \text{ثابت} = M = C$ حيث $\forall x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ فإن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$

وهذا شرط لازم وكافي أي

$$f = C \iff \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0 .$$

ومخططها البياني مستقيم يوازي محور ~~...~~ . $x'x$

مثال:

اختبر لدينا الدالة $f(x) = 2x + 3$ معرفة على $[0, 2]$ بين أن ذ.ت.م عليها واحسب تغيرها الكلي أي $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)$. باستخدام التعريف.

الحل:

لنأخذ التجزئات الثلاث التالية:

$P_1 = \{0, 1, 2\}$

$P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

$P_3 = \{0, \frac{1}{10}, 0.5, 1, 1.5, 1.9, 2\}$.

بين كل عدد عادي يوجد عدد غير عادي .

عندئذٍ نشكل المجموع:

$$\vartheta(f ; P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x)| = 2(x_n - x_0)$$

حيث الدالة متزايدة تماماً على م.ت تتفانى الحدود مع بعضها .

$$= 2(2-0) = 4.$$

وهي نتيجة لا ينها على باقي التجزئات .

في هذا المثال: $\Delta f(x) = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq 0$

ومنه

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(2x+3) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \{\vartheta\} = 4.$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in Q = [0,1] \cap Q \\ & ; \quad x \in [0,1]. \\ -1 ; & x \in \tilde{Q} \text{ (مجموعة الأعداد غير عادية) } = [0,1] - Q. \end{cases}$$

و $R = Q \cup \tilde{Q}$.

هذه الدالة تعرف باسم دالة ديريخليه وهي دالة محدودة ولكنها مستمرة في أي نقطة (نقاط انقطاع من النوع الثاني). وهي دالة ليست ذات م.م على الفترة $[0,1]$ وهكذا على R إذا أخذنا التجزئة:

$$\{x_0 = 0, y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_n, x_n = 1\} = P$$

حيث: $x_1, \dots, x_n$ أعداد نسبية .

$y_1, \dots, y_n$ " غير عادية (غير نسبية) .

لنشكل المجموع التالي:

$$\vartheta(\varphi ; P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x_k)|$$

$$= |\varphi(y_1) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_1) - \varphi(y_1)| + |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ مرة}} = 2n.$$

$\sin n\pi = 0$ $\qquad$ $\cos(n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$ $\qquad$ (يحدد مثلا cos, sin بالتجزئة حسب اختيار n).

لا يمكن جعل هذا المقدار < M وهذا المقدار غير محدود (أي المجموع) وعندها نكتب:

$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \lim_{n \to \infty} (2n) = \infty \Rightarrow$ الدالة ليست ذ.ت.م على $[0,1]$

ملاحظة:

هذه الدالة ليست محدودة التغير على أية فترة جزئية مغلقة من R وليست ذ.ت.م على R.

مراحل المثال السابق $P_n[0,1]$

$$P_n[0,1] = \{x_0, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\} \; ; \; n \in N$$

خواص الدالة ذ.ت.م على فترة ما:

لتكن الفترة $[a,b]$ من المستقيم الحقيقي محدودة ومغلقة ولنحاول التذكير بخواص هذه الدالة على الفترة $[a,b] \subseteq R$.

P_1) اذا كانت f دالة ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ تكون محدودة عليها.

إلا أن العكس غير صحيح بشكل عام.

مثال: دالة ديرخليه محدودة وليست ذ.ت.م. مراحل أي تجزئة.

{ لدالة ديرخليه ومعا التجزئة نأخذ أعداد $\in Q$ أو $\notin Q$ }.

الاثبات:

لدينا f ذ.ت.م على $[a,b]$ ولنحاول اثبات $\forall x \in [a,b] \; |f| \le M$.

لتكن $P = \{a, x, b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ و $a < x < b$.

عندئذ يكون:

$$V(f;P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

لأن $\sup V = \overset{b}{\underset{a}{V}}$.

$\Rightarrow \forall x \; ; \; a < x < b$

يكون: $f(x) = |\underbrace{f(x) - f(a)}_{+} + f(a)| \le$ حسب خواص القيمة المطلقة

$$\le |f(x) - f(a)| + \underbrace{|f(a)|}_{\text{ثابت}}$$

$$|f(x) - f(a)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}$$

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| = M \Rightarrow |f| \leq M \; ; x \in [a,b]$$

ح، لدالة محدودة على $[a,b]$

كما يمكننا تعميم هذه الخاصية على R. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f f_2$ لنقدم المثال التالي على أن العكس غير صحيح بشكل عام على الفترة $[a,b]$ كمثال على الدوال ذ.ت.م وهي دير خليه المحدودة على أي فترة، ولكنها ليست ذ.ت.م على هذه الفترة -

$$|\varphi| \leq 1 \Rightarrow \varphi \notin BV_{[a,b]} .$$

P_2) اذا كانت f, g دالتان ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ عندئذ تكون كل من الدوال التالية ذ.ت.م عليها.

أ) $|f|$ ، f^2 ، $\frac{1}{f}$ ؛ $(|f| \geq \alpha > 0)$ ؛ $\alpha . f \; ; \alpha \in R^*$

$f \neq 0$

$x \in [a,b]$ من أجل كل

ب) $\alpha f + \beta g$ ، $f . g$ ، $\frac{f}{g}$ ؛ $(|g| \geq \alpha > 0)$

حيث $\alpha, \beta \in R^*$ ، $x \in [a,b]$.

نتيجة:

اذا كانت f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ فإن كل من الدوال: $f.f$

$f^2, f^3, \ldots, f^k(x) \qquad (2 \leq k \leq n)$

ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$. وكذلك:

$\frac{1}{f^2}, \frac{1}{f^3}, \ldots, \frac{1}{f^k}$ ؛ $\left[\begin{array}{l} x \in [a,b] \\ 2 \leq k \leq n \end{array}\right.$

$\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{f^2}$

ليست من

عدد محدود

$(|f| \geq \alpha > 0)$ ،

اثبات أن الدالة $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$:

بما أن f ذ.ت.م عليها و $|f| \geq \alpha > 0$.

أي $-\alpha \geq f \geq \alpha$

أي $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$

$$|f| \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{f} \leq \frac{1}{\alpha}$$

لتكن التجزئة :

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

ولنشكل المجموع :

$$v\left(\frac{1}{f}; P\right) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right|$$

بتوحيد المقامات :

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot f(x_{k-1})}$$ ← من خاصية القيمة المطلقة

$$\Rightarrow |f| \geq \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow$$ $\frac{1}{f}$ ذات تغير محدود على $[a,b]$ وتغيرها الكلي :

$$\boxed{\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)}.$$

سؤال للمناقشة :

أعد نفس الطلب من أجل : $|f|, f+g, \frac{f}{g}; |g| \geq \alpha > 0$

تمرين: بدل f بـ λf حيث λ أي عدد $\in R$.

(P_5) إذا كانت $f \in BV[a,b]$ على $[a,b]$ وكان $a < c < b$ فإن هذه الدالة تكون ذ.ت.م على كل من الفترتين $[a,c]$, $[c,b]$ والعكس صحيح وعندها نكتب :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

مثال :

من أجل الدالة $f(x) = \sin x ; x \in [0, \pi]$

$0 < c = \frac{\pi}{2} < \pi$.

ويمكن تعميم ذلك كنتيجة لهذه الخاصية :

اذا كانت : $a < c_1 < \dots < c_n < b$ تجزئة للفترة $[a,b]$

وكانت $f \in BV[a,b]$ فانها تكون ذ.ت.م على كل من الفترات :

$[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ... , $[c_n, b]$

كل الفترات مغلقة

وتحقق $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \dots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}}(f)$.

ملاحظة :

عمم هذه الخواص على الفترة $]-\infty, \infty[= R$ حيث f, g دوال ذ.ت.م عليها. عندها نحصل على :

1) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f \pm g) \le \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f)$.

2) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f.g)$ وهكذا

3) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)$

بالمثل لـ P_0 يكون لدينا : $-\infty < c < \infty$; $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{c}{V}}(f)$.

ملاحظة (تعميم):

اذا كانت f مطردة ومحدودة على الفترة $]-\infty, \infty[$ عندها تكون الدالة f ذ.ت.م عليها كمثال الدالة الثابتة معرفة على R بأكمله هي دالة تزايدية اوتناقصية كما انها محدودة وبالتالي تكون ذ.ت.م .

- الدالة الدورية غير محدودة كدالة sin ذ.ت.م على R بأكمله .

الدالة ~~[illegible]~~ ليست محدودة ويمكن أن تكون ذ.ت.م على فترة . اما اذا أخذنا tan : $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ فتكون

مثال :

الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $]-\infty, \infty[$ ليست ذ.ت.م لأنه على الأقل ليست محدودة .